# Eksamen våren 2016 – Løsninger

**DEL 1**
**Uten hjelpemidler**

*Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler*

## Oppgave 1

Variasjonsbredde $= 6\ ^\circ\text{C} - (-6\ ^\circ\text{C}) = 12\ ^\circ\text{C}$

Gjennomsnitt:

$$\bar{x} = \frac{2+0+(-4)+(-6)+2+6}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

Gjennomsnittstemperaturen disse dagene var $0\ ^\circ\text{C}$.

For å finne medianen ordner vi dataene i stigende rekkefølge. Siden det er 6 observasjoner, beregner vi medianen ved å ta gjennomsnittet av de to midterste.

$$-6 \quad -4 \quad \boxed{0 \quad 2} \quad 2 \quad 6$$

$$\frac{0+2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Medianen er $1\ ^\circ\text{C}$.

## Oppgave 2

Antall mennesker: $7,5 \cdot 10^9$

Antall liter vann per person: 2 L

Antall dager i en måned: ca. 30

$$2 \cdot 30 \cdot 7,5 \cdot 10^9 = 450 \cdot 10^9 = 4,5 \cdot 10^2 \cdot 10^9 = 4,5 \cdot 10^{11}$$

Alle menneskene på jorda vil til sammen trenge omtrent $4,5 \cdot 10^{11}\ \text{L}$ vann per måned.

## Oppgave 3

**a** Varen koster $150\ \text{kr} - 120\ \text{kr} = 30\ \text{kr}$ mer i butikk A enn i butikk B.

$$\frac{30}{120} \cdot 100\ \% = \frac{1}{4} \cdot 100\ \% = 0,25 \cdot 100\ \% = 25\ \%$$

Varen koster 25 % mer i butikk A enn i butikk B

**b** Varen koster 30 kr mindre i butikk B enn i butikk A.

$$\frac{30}{150} \cdot 100\ \% = \frac{1}{5} \cdot 100\ \% = 0,2 \cdot 100\ \% = 20\ \%$$

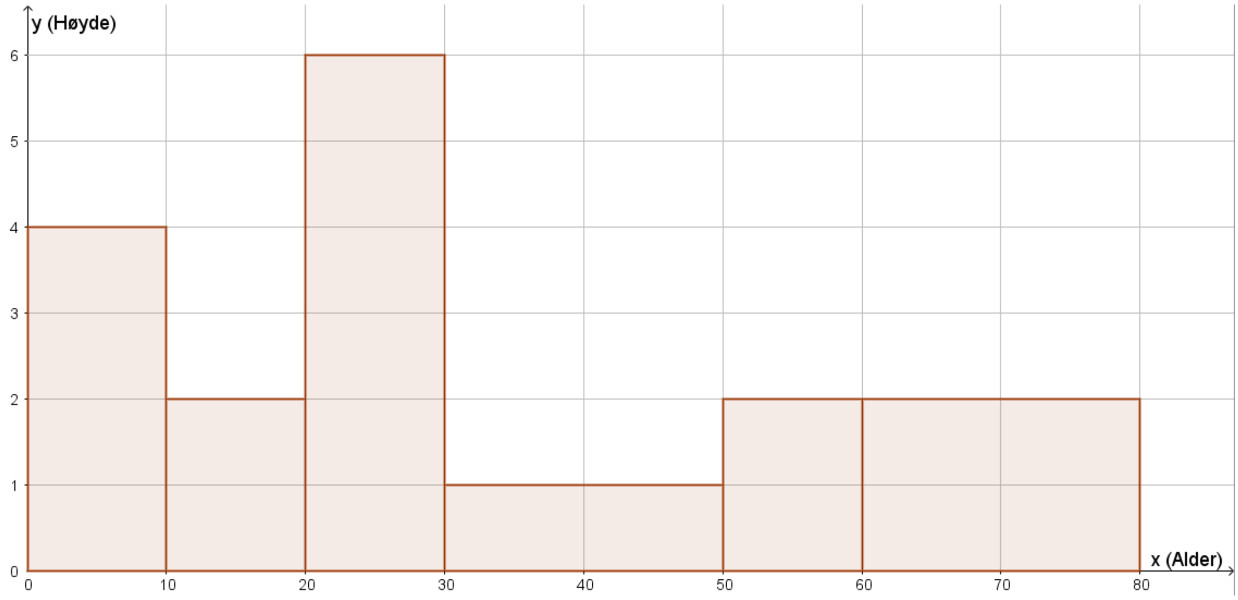
Varen koster 20 % mindre i butikk B enn i butikk A.

## Oppgave 4

**a** Vi utvider tabellen med en kolonne for klassebredden og en for høyden på søylene i histogrammet. Søylehøyden finner vi ved å regne ut frekvensen delt på klassebredden.

| Alder | Frekvens | Klassebredde | Høyde |
|---|---|---|---|
| $[0\,,10\rangle$ | 40 | 10 | $\frac{40}{10}=4$ |
| $[10\,,20\rangle$ | 20 | 10 | $\frac{20}{10}=2$ |
| $[20\,,30\rangle$ | 60 | 10 | $\frac{60}{10}=6$ |
| $[30\,,50\rangle$ | 20 | 20 | $\frac{20}{20}=1$ |
| $[50\,,60\rangle$ | 20 | 10 | $\frac{20}{10}=2$ |
| $[60\,,80\rangle$ | 40 | 20 | $\frac{40}{20}=2$ |

Deretter bruker vi disse opplysningene til å lage et histogram.



**b** Vi utvider tabellen med en kolonne for klassemidtpunkt, $x_m$, og en kolonne for $x_m \cdot f$.

| Alder | Frekvens $f$ | Klassemidtpunkt $x_m$ | $x_m \cdot f$ |
|---|---|---|---|
| $[0, 10\rangle$ | 40 | 5 | 200 |
| $[10, 20\rangle$ | 20 | 15 | 300 |
| $[20, 30\rangle$ | 60 | 25 | 1500 |
| $[30, 50\rangle$ | 20 | 40 | 800 |
| $[50, 60\rangle$ | 20 | 55 | 1100 |
| $[60, 80\rangle$ | 40 | 70 | 2800 |
| Sum | 200 | | 6700 |

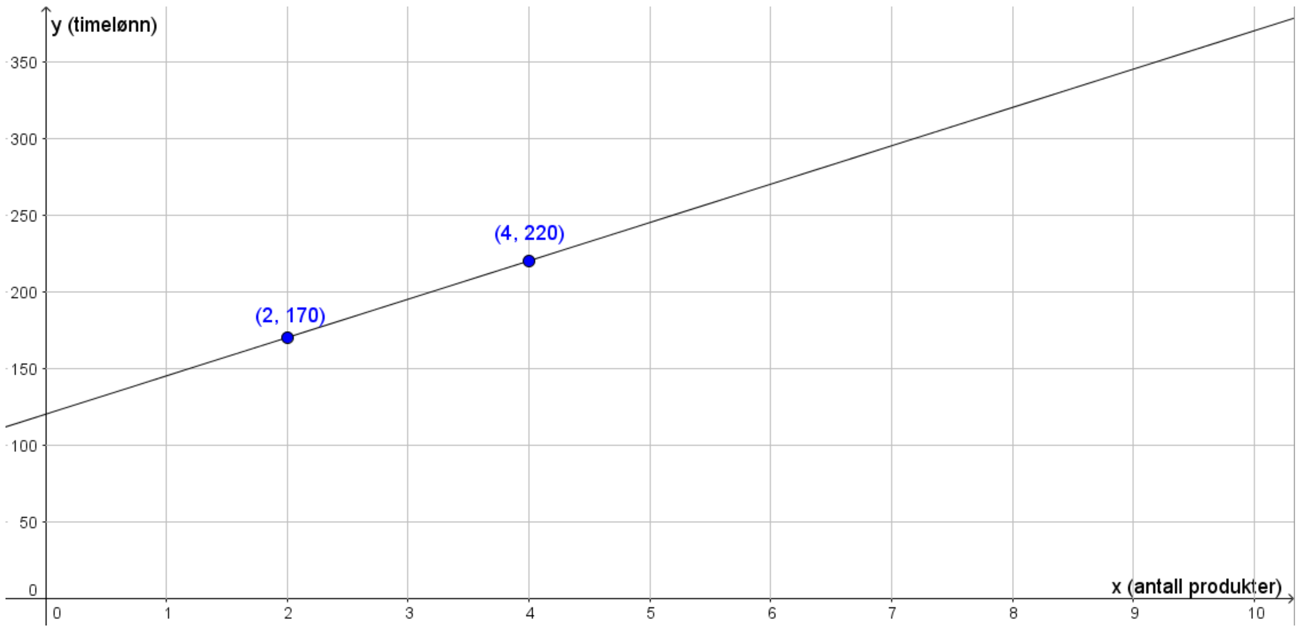
Vi finner nå gjennomsnittet ved formelen $\overline{x} = \dfrac{\text{sum}(x_m \cdot f)}{n}$, der $n$ er antall personer i blokka.

$$\overline{x} = \frac{6700}{200} = 33{,}5$$

Gjennomsnittsalderen for personene som bor i blokk Z, er 33,5 år.

## Oppgave 5

**a** Vi lar $x$ være antall produkter Marte selger per time, og $y$ være timelønna hennes. Informasjonene i oppgaven gir oss da punktene $(2, 170)$ og $(4, 220)$ som vi tegner inn i et koordinatsystem.



**b** Denne modellen vil være lineær og vil derfor være på formen $y = ax + b$, der $a$ er beløpet hun får for hvert produkt hun selger, og $b$ er den faste grunnlønna.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{220 - 170}{4 - 2} = \frac{50}{2} = 25$$

Dette betyr at $y = 25x + b$. Marte tjener altså 25 kr per produkt hun selger.

For å finne $b$ bruker vi punktet $(2, 170)$.

$$\begin{aligned} 170 &= 25 \cdot 2 + b \\ 170 - 50 &= b \\ 120 &= b \end{aligned}$$

Dermed er $y = 25x + 120$, noe som betyr at Martes grunnlønn per time er 120 kr.

**c** Dersom Marte skal tjene 370 kr i timen, må $y = 370$. Dette gir

$$\begin{aligned} 370 &= 25x + 120 \\ 370 - 120 &= 25x \\ \frac{250}{25} &= \frac{25x}{25} \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Hun må altså selge 10 produkter i løpet av en time for å tjene 370 kr denne timen.

## Oppgave 6

$0{,}046 \cdot 10^{11} = 4{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{11} = 4{,}6 \cdot 10^{-2+11} = 4{,}6 \cdot 10^{9}$

$4\,600\,000 = 4{,}6 \cdot 10^{6}$

$\frac{46}{1\,000\,000} = \frac{46}{10^6} = 46 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{1-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$

$46 \cdot 10^{-7} = 4{,}6 \cdot 10 \cdot 10^{-7} = 4{,}6 \cdot 10^{1-7} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$

$0{,}46 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-1-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-7}$

$4{,}6 \cdot 10^{8}$

Dette betyr at tallene i stigende rekkefølge er

$0{,}46 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-7}$

$46 \cdot 10^{-7} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$

$\frac{46}{1\,000\,000} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$

$4\,600\,000 = 4{,}6 \cdot 10^{6}$

$4{,}6 \cdot 10^{8}$

$0{,}046 \cdot 10^{11} = 4{,}6 \cdot 10^{9}$

## Oppgave 7

| Antall land | Frekvens | Relativ frekvens | Kumulativ frekvens |
|---|---|---|---|
| $[1, 6\rangle$ | 5 | $\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$ | 5 |
| $[6, 11\rangle$ | 10 | $\frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0,5$ | 15 |
| $[11, 16\rangle$ | 2 | 0,1 | 17 |
| $[16, 21\rangle$ | 2 | $\frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$ | 19 |
| $[21, 26\rangle$ | 1 | $\frac{1}{20} = 0,05$ | 20 |
| Sum | 20 | 1 | |

## Oppgave 8

**a** Vi lager en krysstabell:

| | Gjør leksene til hver time | Gjør ikke leksene til hver time | Totalt |
|---|---|---|---|
| Har karakteren 3 eller høyere | 15 | 5 | 20 |
| Har lavere enn karakteren 3 | 1 | 5 | 6 |
| Totalt | 16 | 10 | 26 |

**b** $P(\text{gjør ikke leksene til hver time} \cap \text{har karakteren 3 eller høyere i faget}) = \frac{5}{26}$

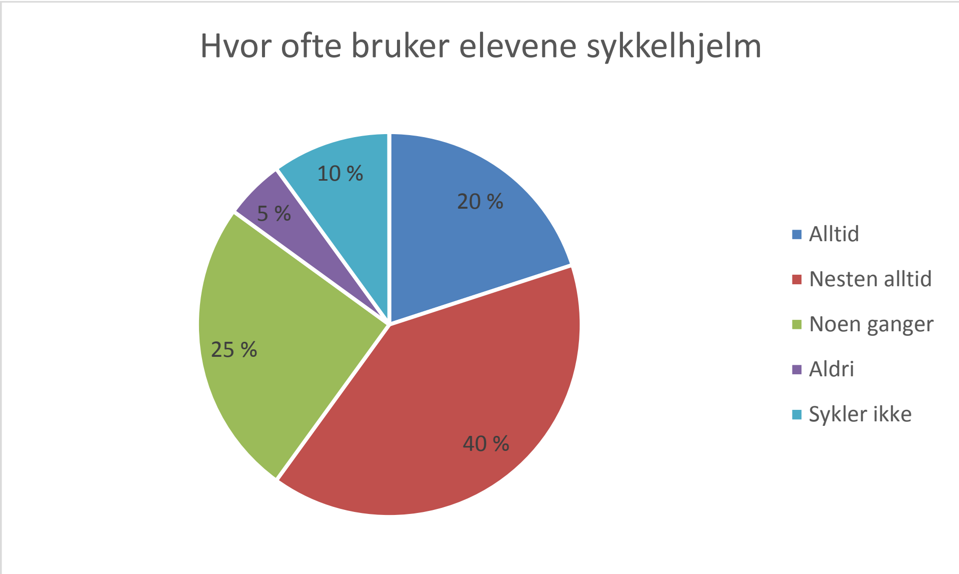
**c** $P(\text{har lavere enn karakteren 3} \mid \text{gjør leksene til hver time}) = \frac{1}{16}$

# DEL 2
# Med hjelpemidler

*Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.*

## Oppgave 1

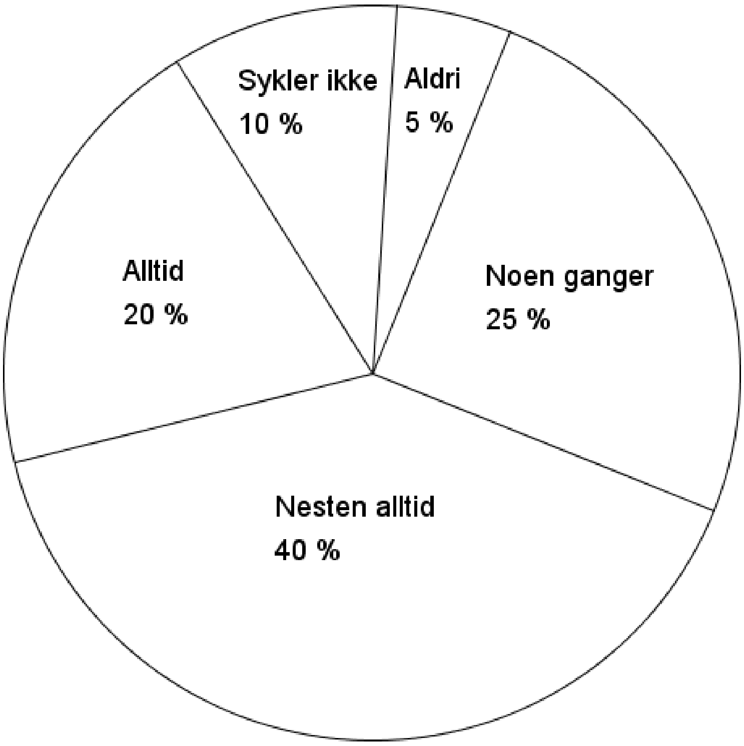
Med Excel:




Med regneark i GeoGebra:
I første kolonne skriver vi inn de ulike kategoriene med tilhørende frekvenser i andre kolonne. I tredje kolonne beregner vi de relative frekvensene ved å dele frekvensen på totalt antall elever. Den relative frekvensen gir oss dermed hvor stor andel av elevene som gir de ulike svaralternativene. I fjerde kolonne beregner vi gradtallene ved å gange den relative frekvensen med 360, siden det er 360 grader i en sirkel. Dette gir oss følgende tabell:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | Frekvens | Relativ frekvens | Grader |
| 2 | Alltid | 88 | 0.2 | 72 |
| 3 | Nesten alltid | 176 | 0.4 | 144 |
| 4 | Noen ganger | 110 | 0.25 | 90 |
| 5 | Aldri | 22 | 0.05 | 18 |
| 6 | Sykler ikke | 44 | 0.1 | 36 |
| 7 | Sum | 440 | 1 | 360 |

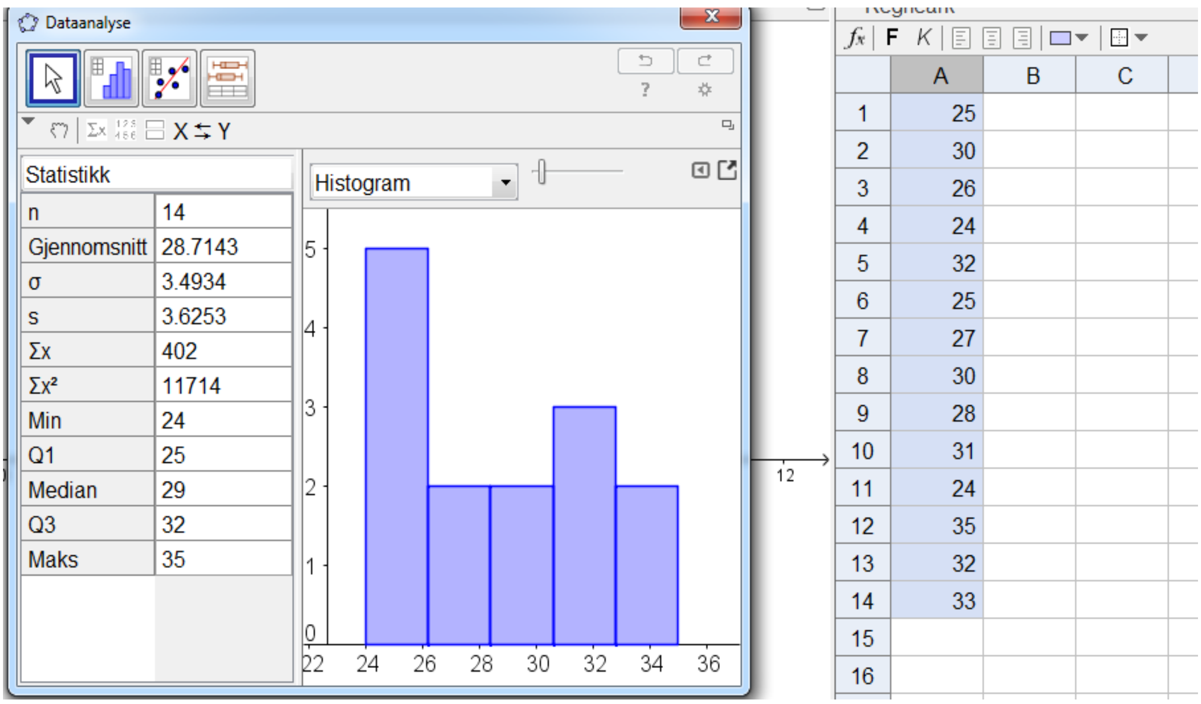
Vi bruker deretter verktøyet «Sirkel definert ved sentrum og periferipunkt» og tegner sirkelen ved å velge to tilfeldige punkter. Deretter bruker vi verktøyet «Vinkel med fast størrelse» og taster inn de ulike vinklene for å lage sektorene. For å lage linjene mellom sektorene bruker vi verktøyet «Linjestykke mellom to punkt». Til slutt bruker vi verktøyet «Tekst» til å skrive inn navn og prosentandeler på sektorene.




## Oppgave 2

**a** Med GeoGebra:

Vi skriver inn observasjonene i regnearket i GeoGebra, markerer tallene og bruker verktøyet «Analyse av en variabel».



Med Excel:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Antall minutter | | | |
| 2 | 25 | | Gjennomsnitt | 28,71 |
| 3 | 30 | | Standardavvik | 3,63 |
| 4 | 26 | | | |
| 5 | 24 | | | |
| 6 | 32 | | | |
| 7 | 25 | | | |
| 8 | 27 | | | |
| 9 | 30 | | | |
| 10 | 28 | | | |
| 11 | 31 | | | |
| 12 | 24 | | | |
| 13 | 35 | | | |
| 14 | 32 | | | |
| 15 | 33 | | | |

Formler:

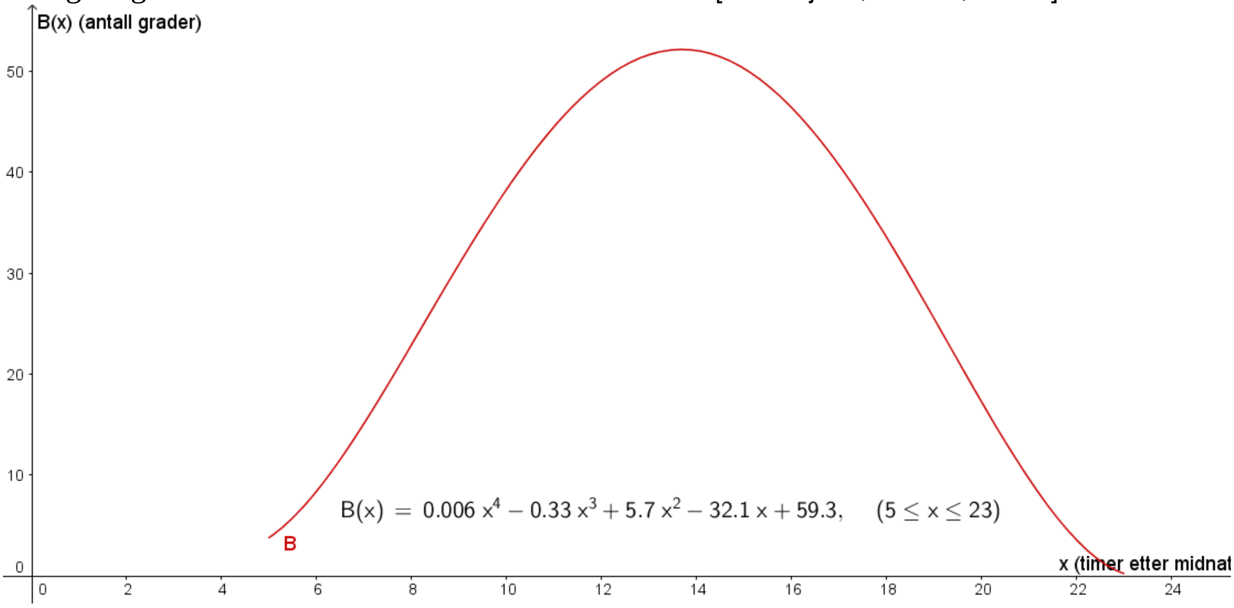
| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Antall minutter | | | |
| 2 | 25 | | Gjennomsnitt | =GJENNOMSNITT(A2:A15) |
| 3 | 30 | | Standardavvik | =STDAV(A2:A15) |
| 4 | 26 | | | |
| 5 | 24 | | | |
| 6 | 32 | | | |
| 7 | 25 | | | |
| 8 | 27 | | | |
| 9 | 30 | | | |
| 10 | 28 | | | |
| 11 | 31 | | | |
| 12 | 24 | | | |
| 13 | 35 | | | |
| 14 | 32 | | | |
| 15 | 33 | | | |

Vi ser at med begge metoder var gjennomsnittslengden på turene til Hans de siste to ukene 28,7 minutter og standardavviket var 3,6 minutter.

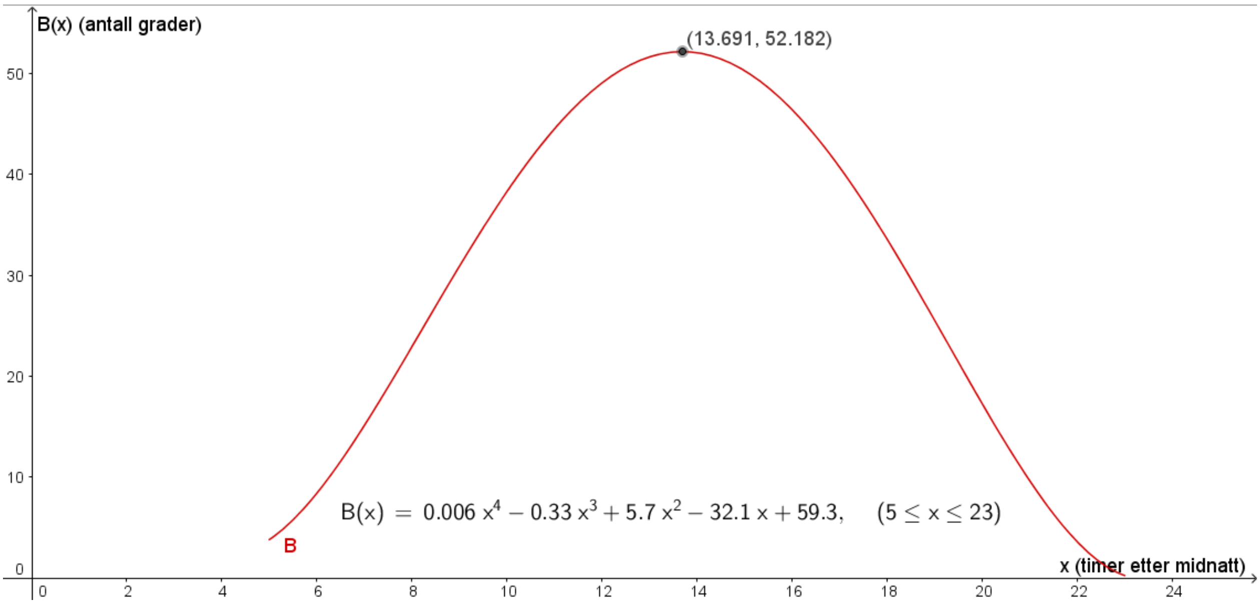
**b** Standardavviket hennes er mindre enn standardavviket til Hans. Dette betyr at det er mindre spredning i lengden på turene hennes enn turene til Hans.

## Oppgave 3

**a** Vi tegner grafen i GeoGebra ved å bruke kommandoen [<Funksjon>,< Start>,<Slutt>].

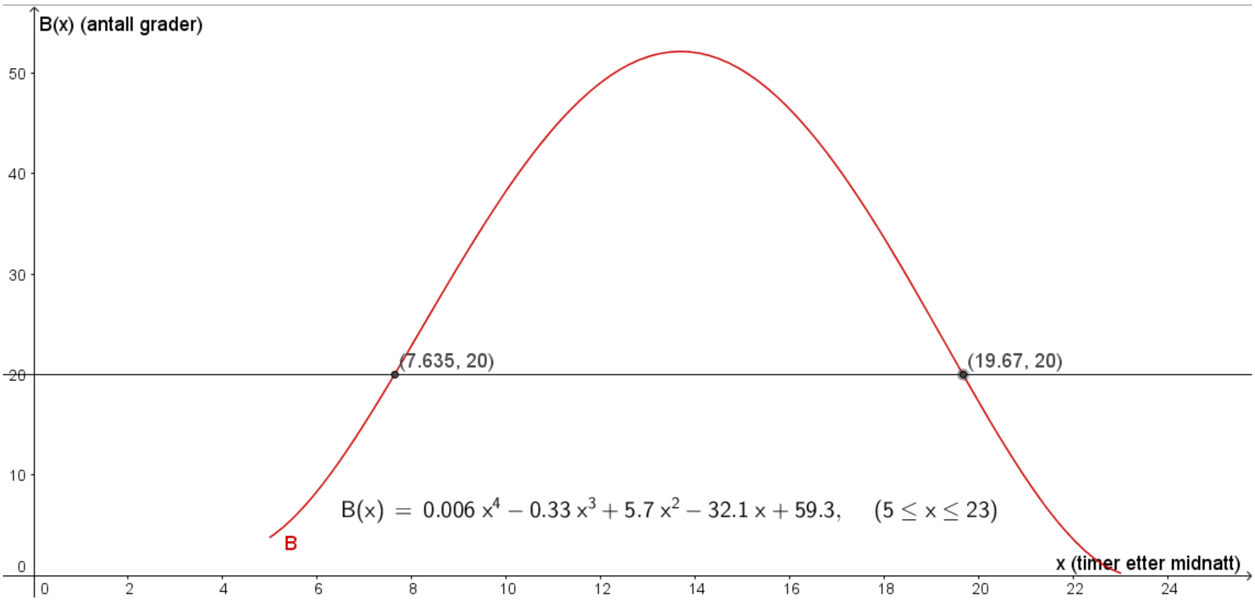



**b** Vi bruker kommandoen Ekstremalpunkt[B] for å finne toppunktet.



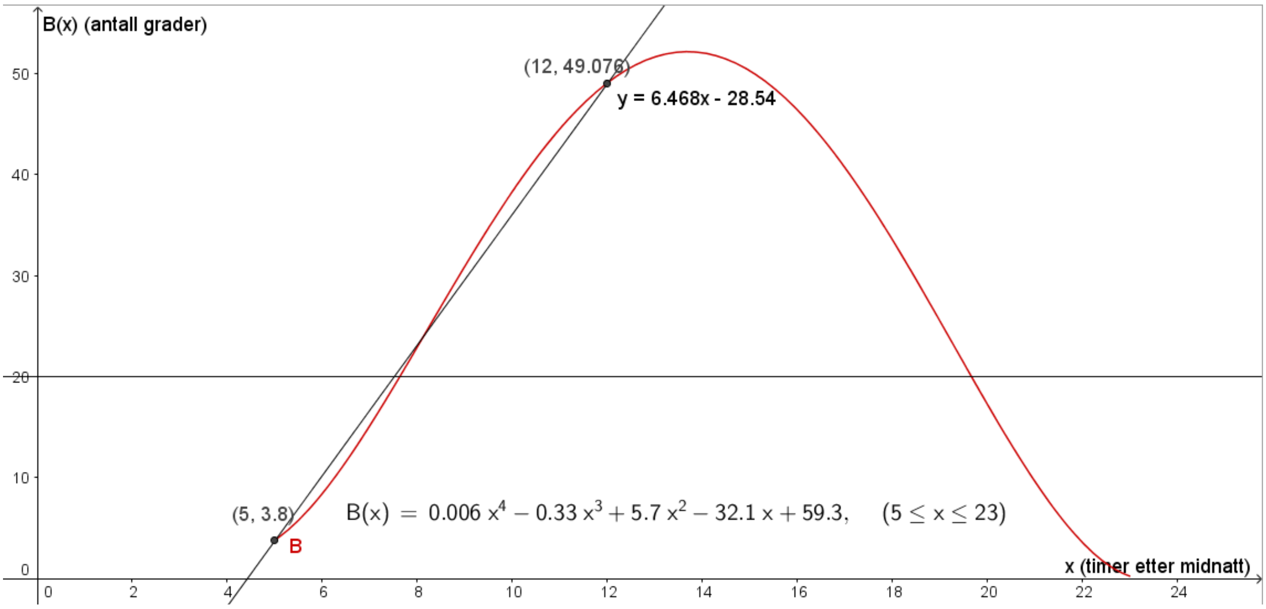

Vi ser at toppunktet er $(13{,}691\,,\,52{,}182)$. Dette betyr at sola sto 52 grader over horisonten da den var på sitt høyeste.

**c** For å finne ut når sola sto 20 grader over horisonten, skriver inn $y = 20$ i inntastingsfeltet og finner skjæringspunktet med $B$ ved å bruke verktøyet «Skjæring mellom to objekt».




Vi ser at vi får punktene $(7{,}635\,,\,20)$ og $(19{,}67\,,\,20)$. Dette betyr at sola sto 20 grader over horisonten omtrent kl. 7.40 og kl. 19.40.

**d** Vi legger inn punktene $\left(5,\,B(5)\right)$ og $\left(12\,,\,B(12)\right)$. Deretter bruker vi verktøyet «Linje» til å finne tegne linja gjennom punktene.



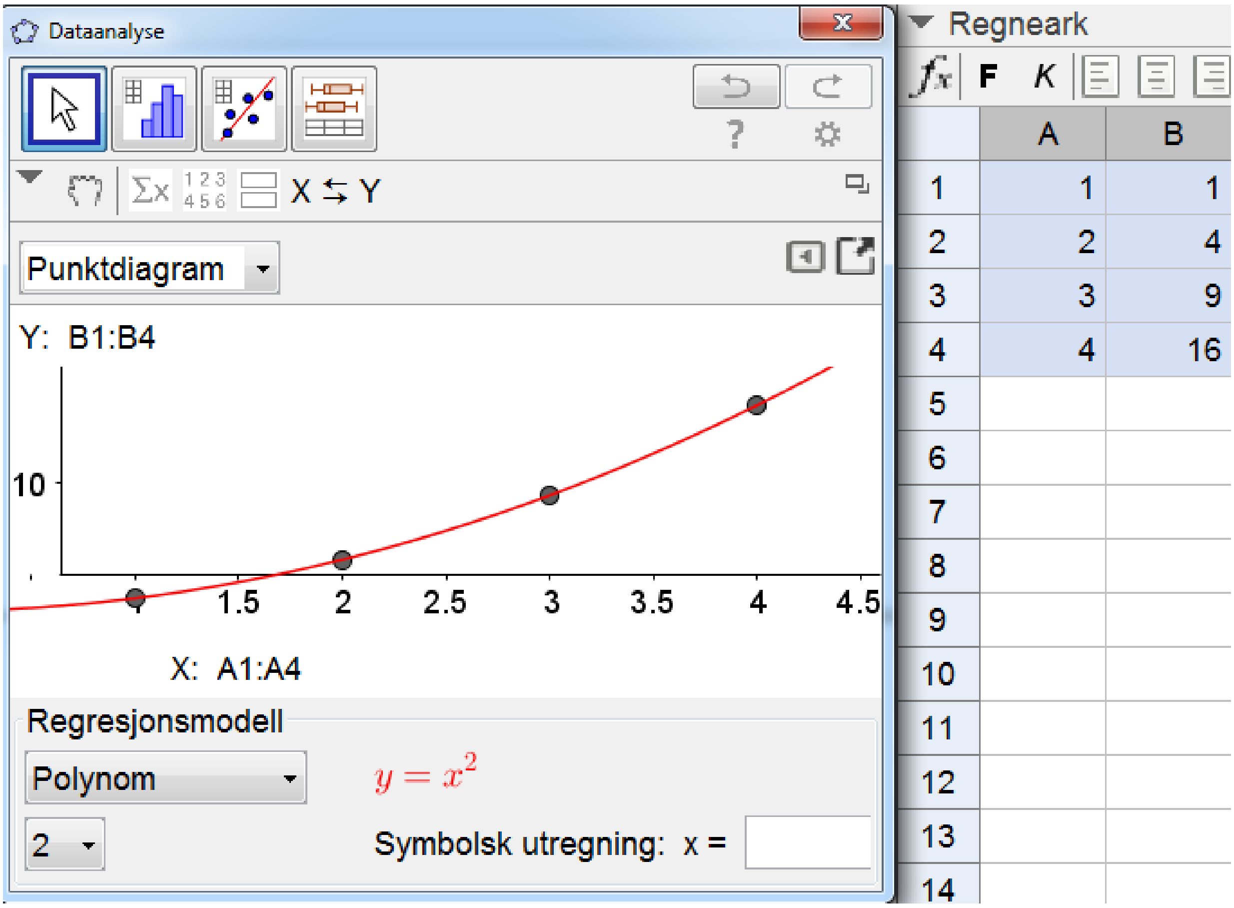

Vi får linja $y = 6{,}468x - 28{,}54$. Dette betyr at sola stiger gjennomsnittlig 6,5 grader per time mellom kl. 5.00 og kl. 12.00.

## Oppgave 4

**a** Vi fyller ut tabellen.

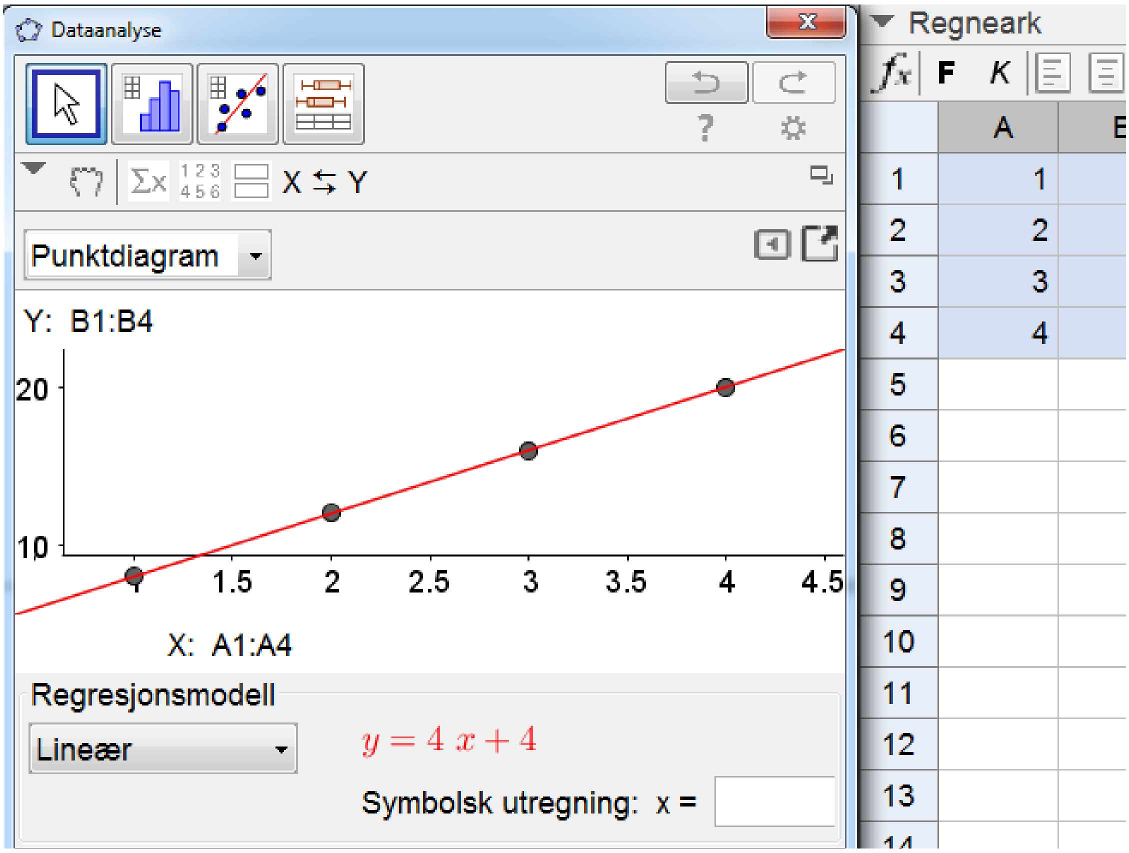
| Figur | Antall hvite rektangler | Antall blå rektangler | Antall rektangler totalt |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 12 | 16 |
| 3 | 9 | 16 | 25 |
| 4 | 16 | 20 | 36 |
| $n$ | $n^2$ | $4n+4$ | $n^2+4n+4$ |

For å finne formelen for figur *n* i de ulike tilfellene skriver vi inn opplysningene i regnearket i GeoGebra, marker tallene og bruker verktøyet «Regresjonsanalyse». For å finne en formel for figur n for antall hvite rektangler velger vi polynom og grad 2. Det gir oss dette resultatet:

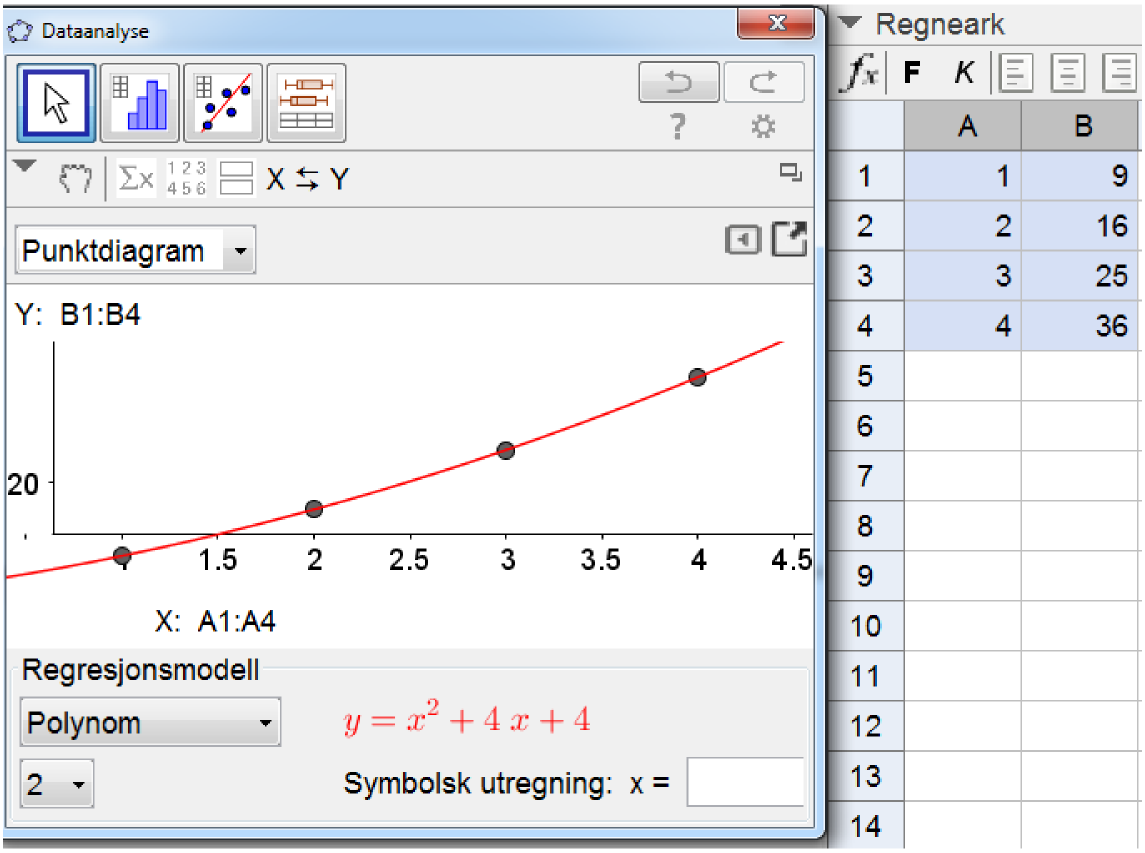



Vi ser at dette gir formelen $n^2$ for figur *n*.

Vi gjør deretter det samme for antall blå rektangler og velger lineær modell.

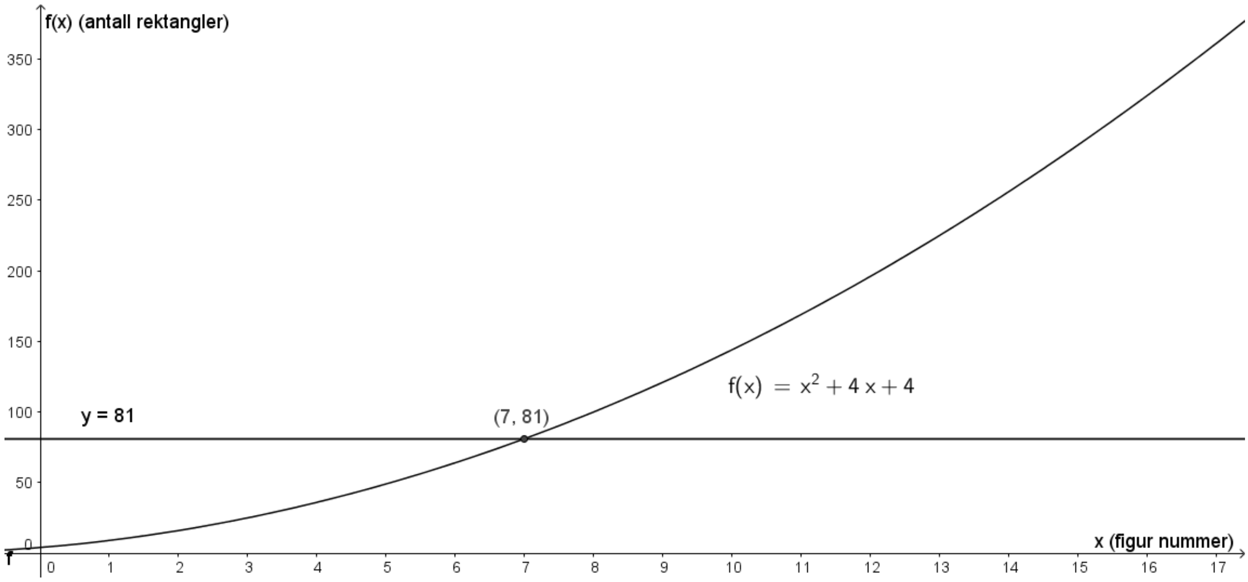



Vi ser at dette gir formelen $4n+4$ for figur $n$.
Til slutt gjør vi dette for antall rektangler totalt, og velger her polynom og grad 2.




Vi ser at dette gir formelen $n^2+4n+4$ for figur $n$.

**b** Vi lar $f(x)$ være antall rektangler totalt i figur *n*. Da får vi at $f(x)=x^2+4x+4$. Vi tegner funksjonen i GeoGebra. Dersom figuren skal ha totalt 81 rektangler, betyr dette at $y=81$. Vi skriver inn dette i inntastingsfeltet og bruker verktøyet «Skjæring mellom to objekt» for å finne skjæringspunktet med $f$.

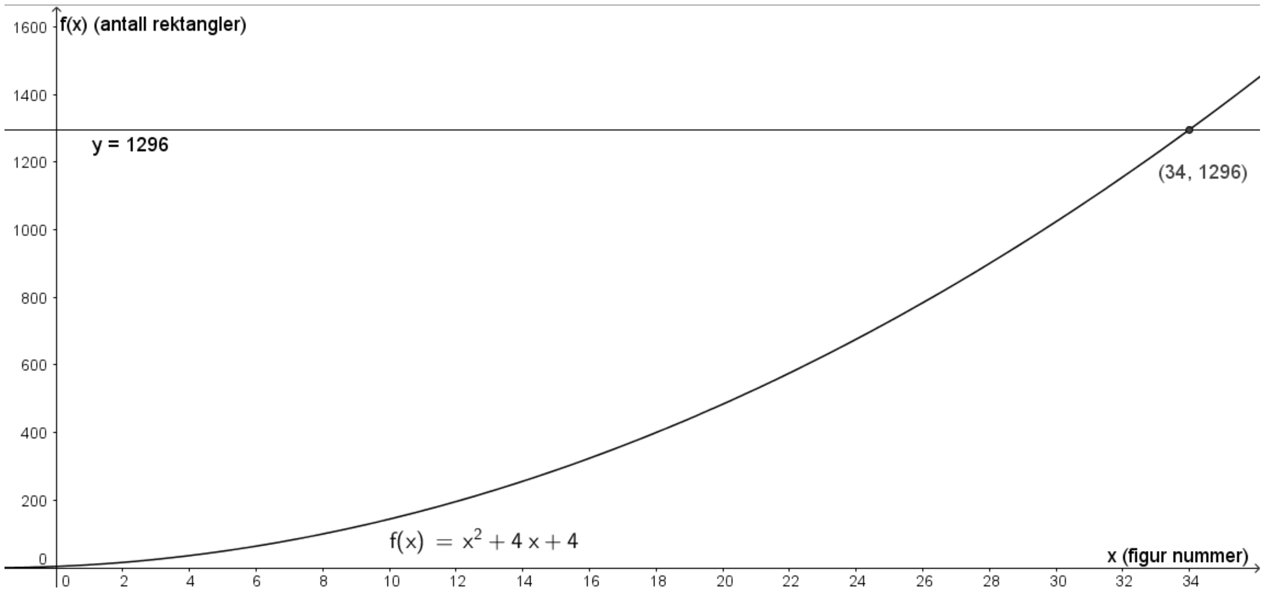



Vi får punktet $(7\,,81)$, noe som betyr at figur 7 har til sammen 81 rektangler. Deretter bruker vi formelen for antall hvite rektangler for figur 7.

$7^2=49$

Altså er det 49 hvite rektangler i figur 7.

**c** Dersom figuren skal ha totalt 1296 rektangler, betyr dette at $y=1296$. For å finne ut hvilket figurnummer dette tilsvarer, gjør vi på samme måte som i oppgave b.




Vi får punktet $(34\,,1296)$, noe som betyr at figur 34 har til sammen 1296 rektangler. Deretter bruker vi formelen for antall blå rektangler for figur 34.

$4\cdot 34+4=140$

Altså er det 140 blå rektangler i figur 34.

## Oppgave 5

**a** Se figuren nedenfor.

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | Prosentvis reduksjon | 8 % |
| 2 | | Vekstfaktor | 0,92 |
| 3 | | | |
| 4 | År | $CO_2$-utslipp i tonn | |
| 5 | 2015 | 20 000,00 | |
| 6 | 2016 | 18 400,00 | |
| 7 | 2017 | 16 928,00 | |
| 8 | 2018 | 15 573,76 | |
| 9 | 2019 | 14 327,86 | |
| 10 | 2020 | 13 181,63 | |
| 11 | 2021 | 12 127,10 | |
| 12 | 2022 | 11 156,93 | |
| 13 | 2023 | 10 264,38 | |
| 14 | 2024 | 9 443,23 | |
| 15 | 2025 | 8 687,77 | |

Formler:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | | Prosentvis reduksjon | 0,08 |
| 2 | | Vekstfaktor | 0,92 |
| 3 | | | |
| 4 | År | $CO_2$-utslipp i tonn | |
| 5 | 2015 | 20000 | |
| 6 | 2016 | =B5*$C$2 | |
| 7 | 2017 | =B6*$C$2 | |
| 8 | 2018 | =B7*$C$2 | |
| 9 | 2019 | =B8*$C$2 | |
| 10 | 2020 | =B9*$C$2 | |
| 11 | 2021 | =B10*$C$2 | |
| 12 | 2022 | =B11*$C$2 | |
| 13 | 2023 | =B12*$C$2 | |
| 14 | 2024 | =B13*$C$2 | |
| 15 | 2025 | =B14*$C$2 | |

**b** Vi ser fra oppgave a at bedriften vil redusere forbruket sitt fra 20 000 tonn til 8688 tonn.

$$\frac{8688}{20\,000} = 0,434$$

Dette betyr at vekstfaktoren er 0,434. Vi finner deretter den prosentvise endringen.

$$1 - 0,434 = 0,566$$

$$0,566 \cdot 100\ \% = 56,6\ \%$$

Altså blir utslippet til bedriften redusert med totalt 56,6 %.

**c** For å finne ut hvor mange prosent denne bedriften må redusere utslippet sitt med hvert år i løpet av disse 5 årene, må vi løse likningen $15\,000 = 30\,000 \cdot x^5$.

$$\frac{15\,000}{30\,000} = x^5$$

$$\sqrt[5]{0,5} = \sqrt[5]{x^5}$$

$$0,87 = x$$

Dette betyr at vekstfaktoren er 0,87. Vi finner deretter den prosentvise endringen.

$1 - 0,87 = 0,13$

$0,13 \cdot 100\,\% = 13\,\%$

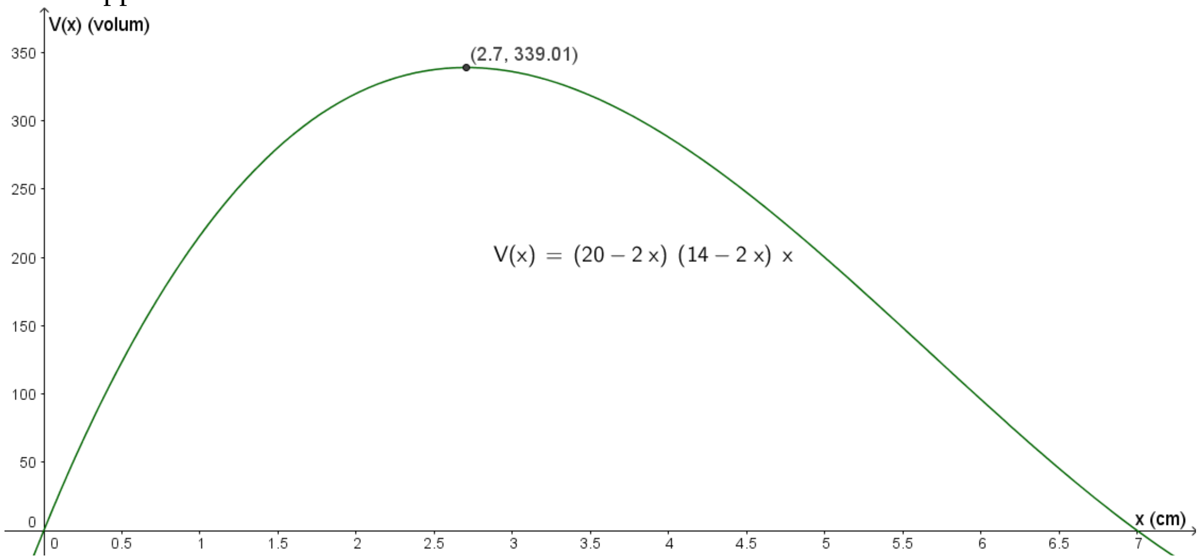
Denne bedriften må altså redusere utslippet med 13 % hvert år.

## Oppgave 6

**a** Vi bruker formelen $V = l \cdot b \cdot h$ til å gjøre beregninger og fyller ut tabellen.

| Lengde av hver side i kvadratene som klippes bort | Lengden av esken | Bredden av esken | Høyden av esken | Volumet av esken |
|---|---|---|---|---|
| 4 cm | $20\text{ cm} - 2 \cdot 4\text{ cm}$ $= 12\text{ cm}$ | $14\text{ cm} - 2 \cdot 4\text{ cm}$ $= 6\text{ cm}$ | 4 cm | $288\text{ cm}^3$ |
| 3 cm | $20\text{ cm} - 2 \cdot 3\text{ cm}$ $= 14\text{ cm}$ | 8 cm | 3 cm | $14\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} \cdot 3\text{ cm}$ $= 336\text{ cm}^3$ |
| 2,5 cm | $20\text{ cm} - 2 \cdot 2,5\text{ cm}$ $= 15\text{ cm}$ | $14\text{ cm} - 2 \cdot 2,5\text{ cm}$ $= 9\text{ cm}$ | 2,5 cm | $15\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} \cdot 2,5\text{ cm}$ $= 337,5\text{ cm}^3$ |
| $x$ cm | $20\text{ cm} - 2 \cdot x\text{ cm}$ | $14\text{ cm} - 2 \cdot x\text{ cm}$ | $x$ cm | $(20 - 2x) \cdot (14 - 2x) \cdot x\text{ cm}^3$ |

**b** Vi lar $V(x)$ være volumet av esken når $x$ er lengden av hver side som klippes bort, og tegner $V(x) = (20 - 2x) \cdot (14 - 2x) \cdot x$ i GeoGebra. Deretter bruker vi kommandoen Ekstremalpunkt[V] for å finne toppunktet til $V$.



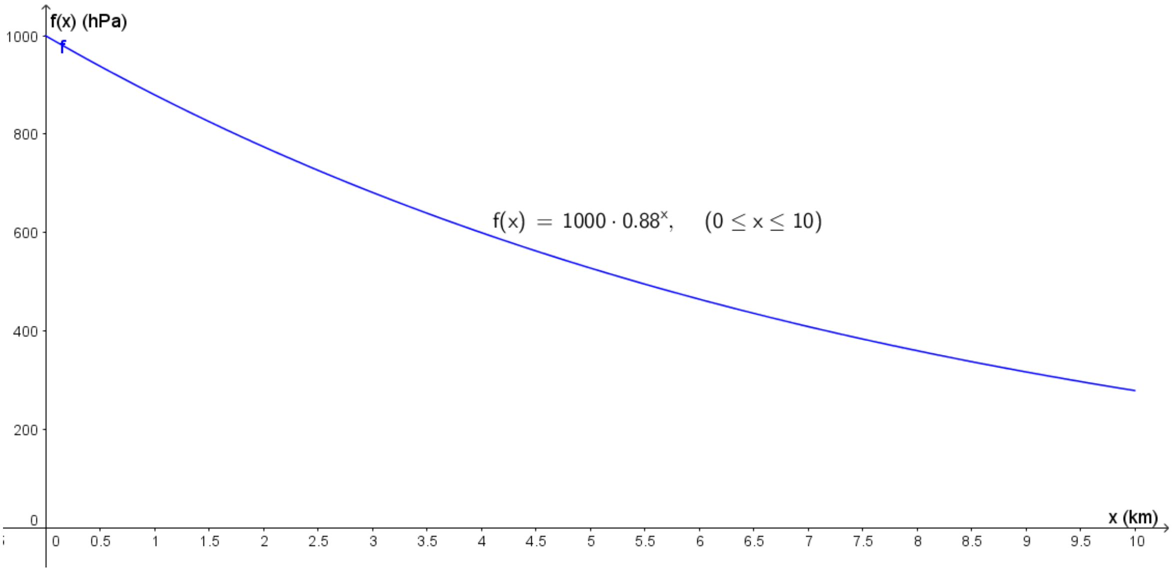

Vi ser at vi får punktet $(2,7\,,\,339,01)$. Dette betyr at lengden av hver side i kvadratene som klippes bort må være 2,7 cm for at volumet av esken skal bli størst mulig. Da blir dette volumet $339\text{ cm}^3$.

## Oppgave 7

**a** Når lufttrykket avtar med ca. 12 % per km, betyr det at lufttrykket minker eksponentielt. Altså kan vi uttrykke lufttrykket med en modell på formen $f(x) = a \cdot b^x$, der $a$ er startverdien og $b$ er vekstfaktoren. Siden lufttrykket er 1000 hPa ved overflaten, betyr det at $a = 1000$. Vi finner deretter vekstfaktoren.

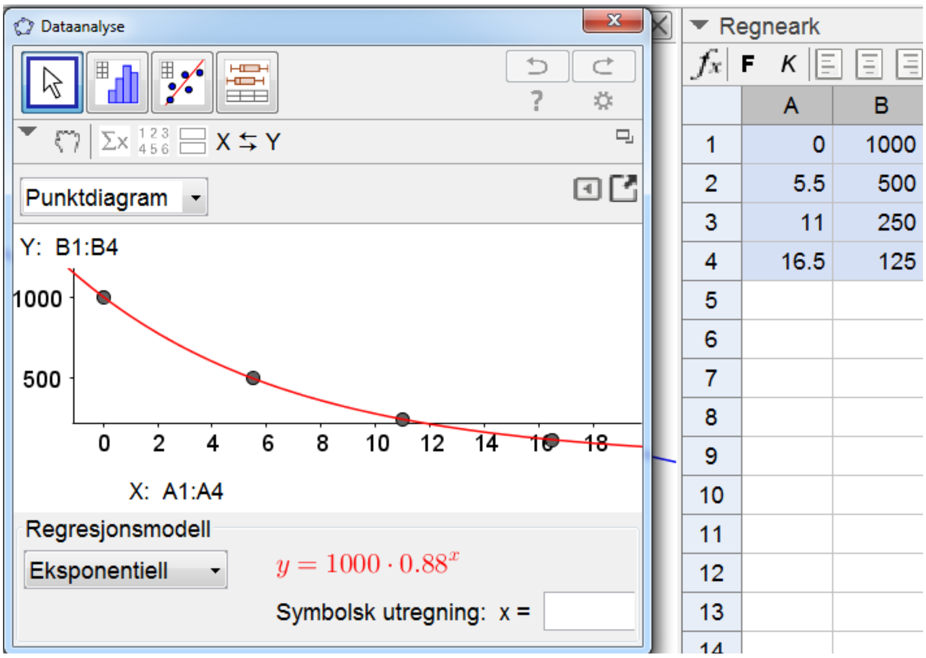
$$b = 1 - \frac{12}{100} = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$$

Altså er $f(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x$.

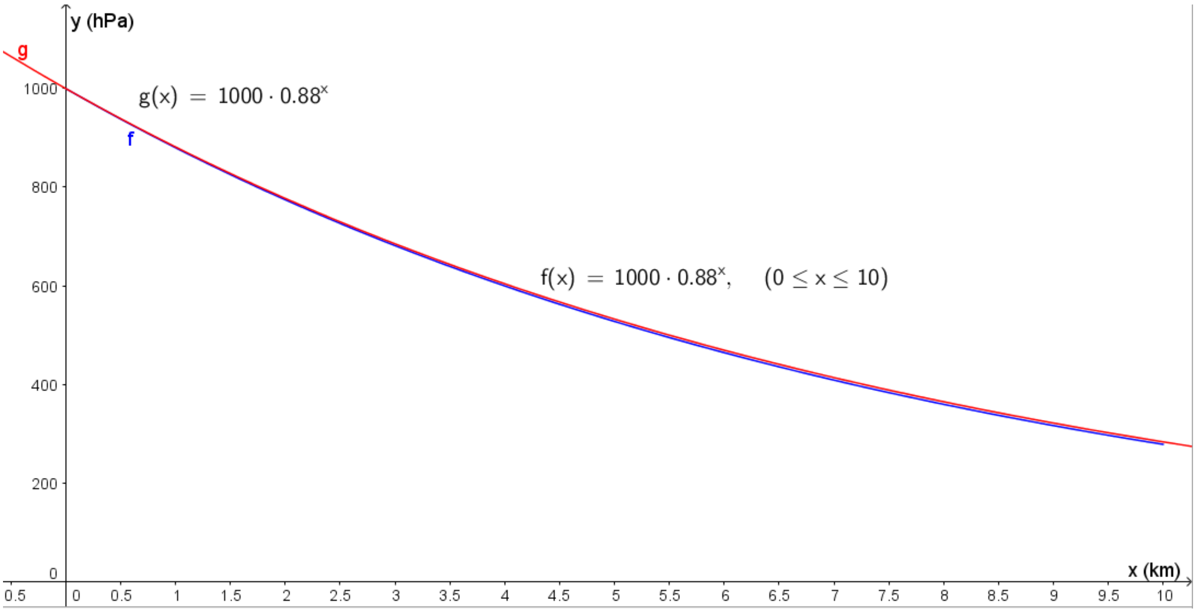



**b** Vi vet allerede at når $x = 0$, så er lufttrykket 1000 hPa. Dersom vi skal dele lufttrykket på to for hver 5,5 km over havoverflaten, betyr det at når man er 5,5 km over havoverflaten, så er lufttrykket $\frac{1000\text{ hPa}}{2} = 500\text{ hPa}$. Videre blir lufttrykket $\frac{500\text{ hPa}}{2} = 250\text{ hPa}$ ved 11 km over havoverflaten og $\frac{250\text{ hPa}}{2} = 125\text{ hPa}$ ved 16,5 km over havoverflaten.

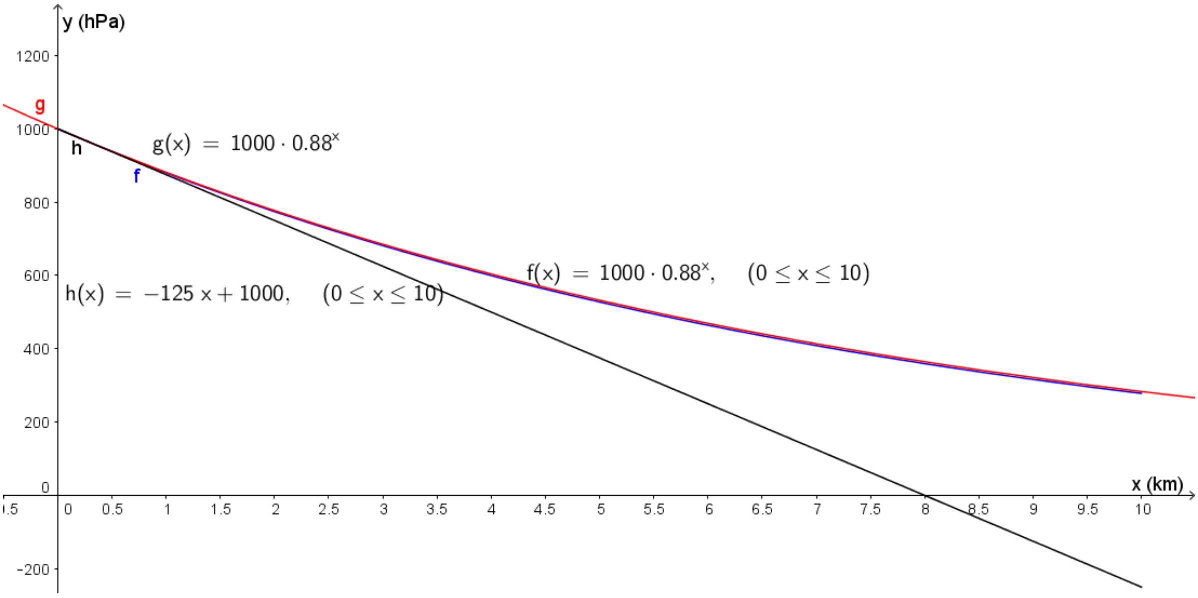
Deretter skriver vi inn opplysningene fra tabellen i regnearket i GeoGebra, markerer tallene, bruker verktøyet «Regresjonsanalyse» og velger eksponentiell modell.



Vi ser at dette er den samme modellen som vi fant i oppgave a. Deretter overfører vi denne modellen til grafikkfeltet.

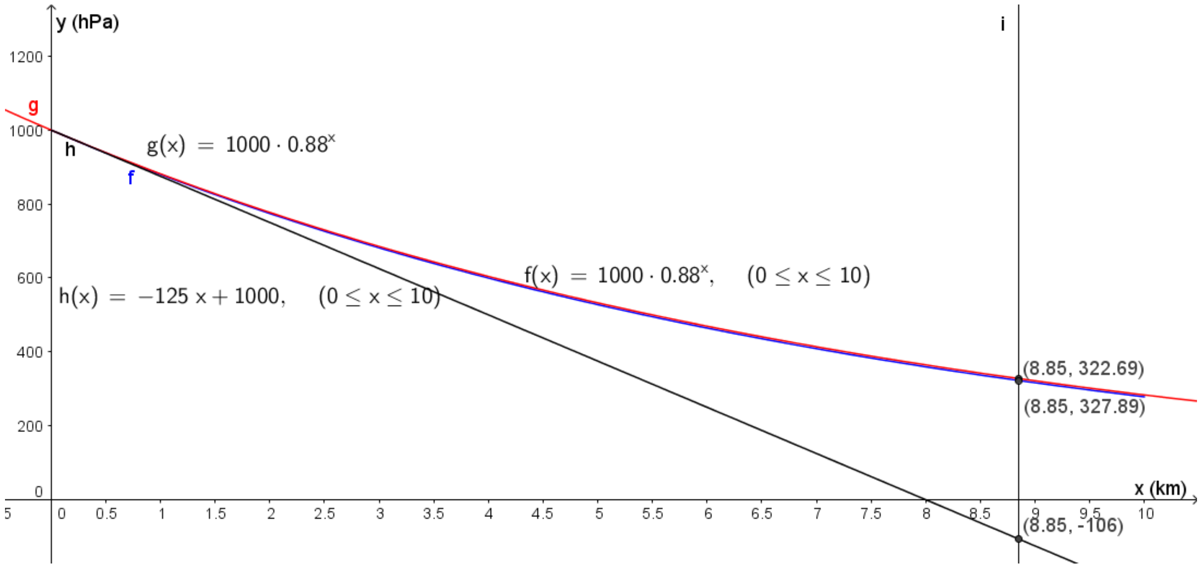



**c** Dersom lufttrykket skal minke med 1 hPa for hver 8 m, betyr dette at modellen blir lineær, altså på formen $y = ax + b$, der $a$ er stigningstallet og $b$ er startverdien. I dette tilfellet er $b = 1000$ og $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{0,008} = -125$. Altså har vi modellen $h(x) = -125x + 1000$. Vi tegner grafen til $h$ i samme koordinatsystem.




Vi ser her at denne modellen er tilnærmet lik $f$ og $g$ for den første kilometeren. Deretter blir avviket stadig større. Dette betyr at dersom man skal gjøre beregninger inntil noen hundre meter over havet, vil den denne modellen være like god som de to andre.

**d** Ved 8848 m over havet er $x = 8{,}848$. Vi tegner denne linja inn i grafikkfeltet sammen med *f*, *g* og *h*, og bruker verktøyet «Skjæring mellom to objekt» til å finne de ulike skjæringspunktene.




Skjæringspunktet mellom linja og *h* er $(8{,}848\,, -106)$. Altså er lufttrykket $-106$ hPa ved 8848 m over havoverflaten ifølge denne modellen. Siden lufttrykket ikke kan være negativt, vil dette uansett være en dårlig modell for å beregne lufttrykk såpass høyt over havoverflaten.

Skjæringspunktene mellom linja og *f* og *g* er henholdsvis $(8{,}848\,, 322{,}69)$ og $(8{,}848\,, 327{,}89)$. Altså er lufttrykket 322,69 hPa ved 8848 meter over havoverflaten ifølge modell *f*, og 327,89 hPa ved 8848 m over havoverflaten ifølge modell *g*.

Sitat 4 sier at lufttrykket ved Mount Everest (altså 8848 meter over havoverflaten) er redusert til en tredel, altså $\dfrac{1000\text{ hPa}}{3} = 333{,}3\text{ hPa}$. Dette betyr at både modell *f* og modell *g* er ganske gode til å beregne dette lufttrykket, men vi ser at modell *g* passer aller best.